形の組合せいろいろ（7・7・15）

―ポリオミノ・ポリヘクス・ポリスフェロ―

（詰合せパズル・正方形から正八面体へ）

桑垣　煥（昭15・理甲）

昭和四十年代に三高の先輩である東大の森口繁一先生がアメリカから帰国され、『科学朝日』にペントミノの正方形を立方体に変えた立体ペントミノのことを書かれたのを読んだのが今日のお話に関心をもつきっかけになっています。それが立方体からエスカレートして球にまでなりますが、文科系の方々にもわかるようにとのお話なので、なるべくそのようにします。そこで全体を四つに分けて、最初に表題の片カナの部分の単語の意味を説明するため、組合せてできた形の名前についてその由来をお話します。次にそれらの形の用途・応用について、三番目に、一寸数学のにおいのある「符号数」のお話を、最後に本題のポリスフェロをどのようにして発見したかを述べます。

一、組合せた形の名称

ポリオミノ Polyomino は同じ大きさの合同な正方形いくつかを平面上で、辺と辺とを重ね合せてくっつけた形をいいます。その由来を申しますと、昔から西洋にドミノ domino（図1）というゲームがあります。これは一から六までのサイの目を何もないブランクの七種の中の二つを描いた二個の正方形を並べた長方形を表面とする厚みのあるパイ（背中の黒いマージャンパイのような）二十八枚（$7+6+\cdots+2+1=28$　またはくり返しを許す組合せの数を用いて ${}_7H_2=7\times 8\div 2=28$）で行うトランプの七並べの元祖に当るものです。四人でテーブルを囲み、一人七枚ずつを（数が少ないので）一段に横長に伏せて並べ、それを一枚ずつ取って七枚を自分のパイとします。そして席順にその中から一枚ずつを同じ目をくっつけるように出していき、同じ目にくっつけるパイがないとき任意の一枚を「ドミノ」と宣言して横に表を上にしておきますが、おいた目の和が負の点で計算され、パイを出し終ったとき終了します。ドミノという単語は西暦の紀元前を表わすB.C.に対して紀元後のA.D.のDと同じで、領有を意味しますが、dは二を意味する単語（deux など）の頭の字であり、ドミノのパイは既述のように正方形二個をくっつけた形を表にもっているので、本来の意味に関係なく、dの所を変えて、正方形三つをくっつけた形をトロミノ tromino、四つの形をテトロミノ tetromino、五つの形をペントミノ pentomino 以下六

図1　ド ミ ノ

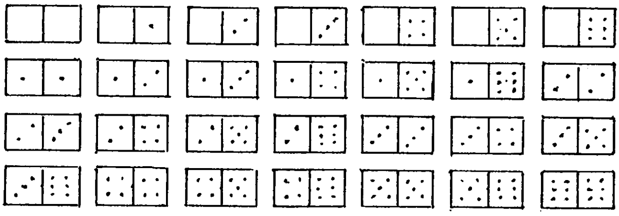


図2　ドミノ → トロミノ

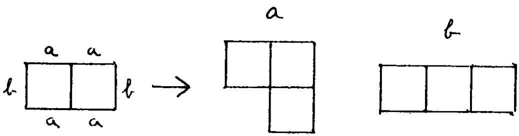


図3　ダイアモンド → トラモンド → テトラモンド

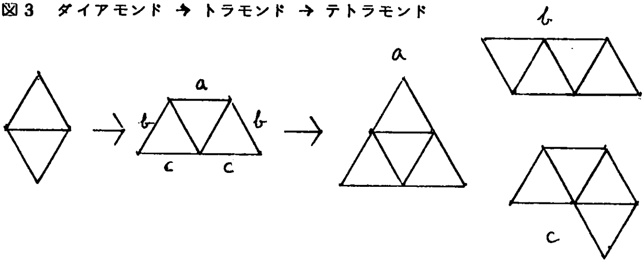
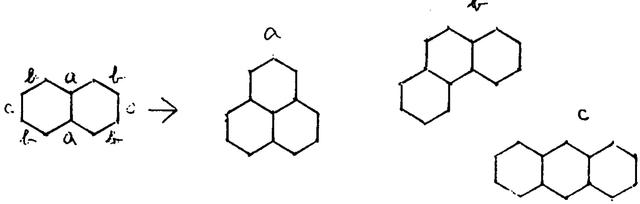


図4　ダイヘクス → トリヘクス



つヘクソミノ hexomino、七つヘプトミノ heptomino、八つオクトミノ octomino、九つは一寸面倒で、十のときデコミノ decomino、…と呼びます。これらは国際共通語で、英語では複数の語尾に es をつけたりするようです。さらにそれらを総称してポリオミノ polyomino といいます。同じ大きさの正方形は平面上で辺と辺をくっつけていくつでも並べることができるのでこのような形が可能なわけです。

また、正方形の数が同じで、そのままでも裏返しても重ならない形の数を**図2**のような方法（ドミノからトロミノを作る場合）で調べると、ドミノ一種、トロミノ二種、テトロミノ五種、ペントミノ十二種、ヘクソミノ三十五種、ヘプトミノ百八種…となります。（文献四、七）

平面上で一つの基本になる形を、重ならないように、いくつでも辺と辺でくっつけていくには、もとの形が平面をしきつめられるものであることが必要条件です。平面全体は任意の合同な三角形、四角形でもしきつめられますが、対称性等があって美しいのは正多角形で、その中で平面をしきつめられるのは正方形の他に正三角形と正六角形だけです。

正三角形を組合せる場合

言葉の説明を一しょにやってしまいますと、トランプのダイアモンドの形が同大の正三角形二個を辺と辺でくっつけた形になっていて、ダイアモンドのダイ di にまさしく二の意味があるの

でドミノのときと同じように、正三角形三個をくっつけた形をダイの代りにトリ tri をつけて、一しょにしてトラモンド tramond（一種）、四個の形をテトラモンド tetramond（三種、**図3**）、五個の形をペンタモンド pentamond（四種）、六個の形をヘクサモンド hexamond（十二種）、七個の形をヘプタモンド heptamond（二十四種）、八個の形をオクタモンド octamond（六十六種）…と呼び、これらを総称して、ポリアモンド polyamond といいます。時間の都合でポリアモンドについては簡単にさせていただきます。（文献八）

正六角形を組合せる場合

三つ目のこの場合は前二者のようなうまい言葉がありませんので、正六角形 regular hexagon の六角形の頭のヘクス hex を使って同大の正六角形二個をくっつけた形をダイヘクス dihex（一種）、三個の形をトリヘクス trihex（三種、**図4**参照）、四個の形をテトラヘクス tetrahex（七種、**図6**）、五個の形をペンタヘクス pentahex（二十二種）、六個の形をヘクサヘクス hexahex（八十二種）…と呼び、これらの総称を、表題の二番目のようにポリヘクス polyhex といいます。（文献九）

次に、一定個数の同大の同じ形をくっつけた形が、回転と裏返しで重ならないものがいく通り

あるかは大切な問題で、基本の形二個のものから三個のものを作る過程を**図3**で説明しますと、ダイアモンドからトラモンドは一種しかできませんが、トラモンドのa、b、cの辺の外側に正三角形をくっつけたテトラモンドは三種できます。次の**図4**のダイヘクスからトリヘクスを作る場合も同様です。

トリヘクス三種からテトラヘクス七種ができますが、各片にアメリカで形から連想される愉快なニックネームをつけています。(**図6**)、図の下に記しておきましたが、呼ぶのに長すぎるので、二十六種以内の場合はアルファベットの大文字一字で、例えばプロペラはテトラヘクスYのように呼びます。そのアルファベットは図の各片の右下に付記しました。

同数の同じ形をくっつけた形がいく通りあるかは、ポリオミノ・ポリアモンド・ポリヘクスについては、コンピュータで、一部の形については、十個以上による場合まで計算されています。例えば正方形十個によるデコミノdecominoの場合四千六百五十五種です。

これらポリ何とかの全体（立方体を基本の形とするポリキューブpolycube等も含めて）の名称がないので、普通のつけ方であれば、ポリグラフpolygraphとなるが、これはうそ発見機になるので具合が悪い。そこでポリフィギュアpolyfigureかマルティグラフmultigraph、また日本語では「多重図形」とか「連結図形」を考えています。

図5　テトロミノ
(右上 符号数)

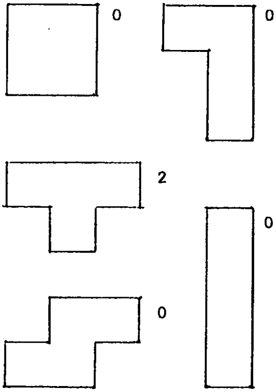


図6　テトラヘクス
(右下 名称の文字)

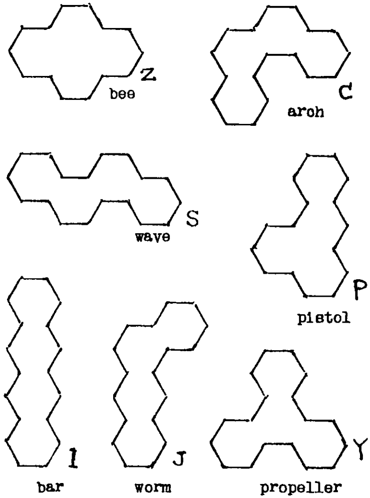


図7　ペントミノ の 長方形
10 × 6

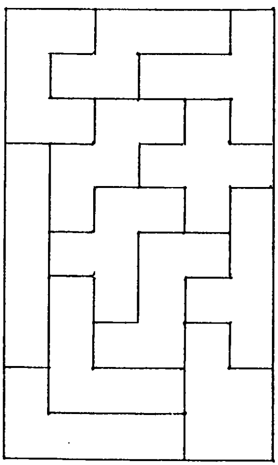
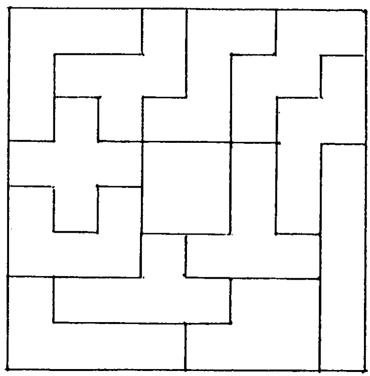


図8　ペントミノ の 穴あき正方形
8 × 8



二、応用・用途

(一) 図案の要素

ポリオミノ・ポリヘクス等はどれも単純な一つの形の結合なので、二個・三個の組合せの形を図案の基本要素の形、デザイン等に使うことができる。例えばダイヘクス・トリヘクス（図4）は昔から亀甲模様と呼ばれ、目出たい図柄として着物の柄（ガラ）等に使われています。他に外国の軍隊で軍人・兵士の制服の階級章に山形のトロミノかペントミノが（意識していないかも知れないが）使われています。

(二) 記号・信号（旗）・文字・数字

種々の記号・信号・信号旗・文字（表音文字の母音と子音）・数字等に用いると、その形を横にしても、任意に回転しても、裏返しにしても判別できるから便利です。

昔、海軍で教えられた艦船で使うＡＢＣ…を表わす国際信号旗は風でひるがえったり、回転したり、裏から見たりしても判り易いようにできている。例えばＡは長方形で先に切れ目がある白と青の二色旗であり、Ｂは赤一色の長方形である。日本の文字はそうでもないが、上下反対とか裏から見て読めないのは不便なので、未来の文字・数字としてはポリミ……が使われる可能性があります。（高文化の宇宙人は既に使っているかも知れません。！？）

定った個数の形の種類の数から考えると、例えば、十進法の数字（0から9）をペントミノ（十二種）か、ヘクサモンド（十二種）で表わす。（これは十二進法でも使える）

表音文字としてはヘクソミノ（三十五種）、ヘプタモンド（二十四種）またはペンタヘクス（二十二種）がある。とくに、母音だけなら、テトロミノ（五種**図5**）かテトラヘクス（七種**図6**）で宜しい。

㈢フローリング・しき石・食卓・机等

ホテル・美術館等の床に正三角形（あみの目状）、正六角形（蜂の巣状）のフローリングがよく使われている。

昔、三高の化学の教授であった加古三郎先生のお宅に遊びに行ったとき、縁側から庭に下りる所にある畳一帖ぐらいの長方形の石だたみにペントミノ一揃い十二種を詰め合せたような線（**図7**）が描かれていたことを思い出しました。また、食卓の広さを人数に応じて変えるため、何個かのトロミノまたは何個かのトラモンド等を使った、西欧風の部屋を見ることがあります。

その他に、諸種のゲーム盤としてよく使われています。

囲碁・将棋・チェス・チェッカーは正方格子かそれに近い長方格子の盤、

ダイアモンドゲームとアメリカの三人用チェスは正三角格子の盤、

昭和のはじめごろ、国際三人将棋というのが考えられ、一辺が七個の正六角形からなる正六角

形状の盤が使われた。専門棋士（将棋の）の手合いも行われたが、二人が協力してしまうのでうまくなく、すぐ消えてしまった。

(四)詰合せパズル

基本の形を一定個数くっつけた多重図形（ポリ…の総称）の一揃い全部の片による長方形・正多角形等を作る詰合せパズルが考えられ、その実物が市販されています。それらの紹介と立方体以外に球を基本の形とする多重図形（ポリスフェロ polysfero と呼ぶ）による三次元パズルを考案し、発表したときのことを後で述べます。

以下に若干の説明を加えて、多重図形による詰合せパズルの現況を示します。

「ポリオミノ」

ペントミノ　基本の正方形の数が5×12の六十なのでいろいろの長方形が考えられるが10×6の長方形（**図7**）の箱に入ったものが市販されていて、わりに早く出たのでお子さんやお孫さんたちに与えられた方も多いと思います。勿論12×5、15×4、20×3の長方形も可能です。

さらに、ペントミノ一揃い十二片とテトロミノの正方形型の一片を一緒にして、60＋4を8×8の正方形（**図8**）の箱のものも市販されています。箱の底が市松にしてあるのは古くから西欧で使われているチェスボードから考えられたようです。

ヘクソミノ　正方形の数が6×35の二百十個で長方形のできる可能性があるのに次章に述べ

る理由で不可能なので、19×11の二百九個の長方形の長辺の中央に一個をつけたハンドバッグ型（図9）の箱のものが市販されています。形がそっくりなのでハンドバッグ型と仮称しました。

ダブルテトロミノ　一揃いのテトロミノは4×5の二十個の正方形があるがやはり次章の理由で長方形はだめなので、2揃いを用いて、20×2の四十個を8×5の長方形の箱で市販されています。10×4の長方形も可能です。

「ポリアモンド」

ヘクサモンド　6×12の七十二個の正三角形の大きさをもつ十二片を一つの等角六角形の箱に入れて市販されています。この十二片を箱から出して、6×6の菱形（図10、ダイアモンドの形）、6×6のジグザグの長方形状ともに可能です。（図11）

ヘプタモンド　7×24の百六十八個の正三角形で、一辺が二の正六角形七個による六ベンの花の形の箱のものが市販されていて、これは一辺が二の正六角形を基本の形とみるとヘプタヘクスの一種です。（右の長方形に状をつけたのは正確には長方形になっていないからです）余り難しいのでまだどこにもあるようです。

「ポリヘクス」

テトラヘクス（図6）4×7の二十八個の正六角形の大きさなので7×4の平行四辺形状に詰

められます。(図12) また、7×4、4×7のジグザグ型(図12)にもできます。

ペンタヘクス　5×22の百十個の正六角形による11×10の平行四辺形状(図14)の箱で市販されています。

テトリクス(図15)一揃いのテトラヘクスと一揃いのトリヘクスの合併したもので、4×7と3×3で合計三十七個の正六角形で一辺が六個の正六角形状にできます。(文献五)

一般に詰合せパズルは、難かし過ぎても、易し過ぎても不適ですが、三大別して難・並・易に分けますと、並に入るのは次の数種になります。

ペントミノ　の長方形

ヘクサモンド　の菱形(図10)とジグザグの長方形状(図11)

テトリクス　の正六角形(図15)

後述のトリスフェロとダイスフェロによるピラミッド型(正方錐、図16)

三、符号数

トロミノ、テトロミノ、…それぞれが何種あるかを調べるのは一つの数学の問題ですが、ここで別の数学を少しやります。(文献六)

図9　ヘクソミノ の 長方形　19×11 ＋ 1×1

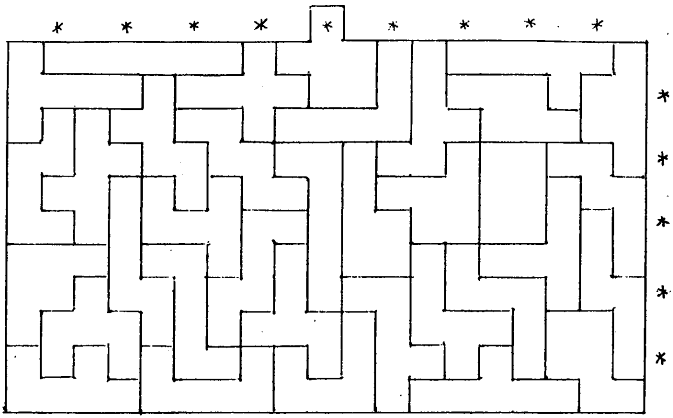


図10 ヘクサモンド の 菱形
6 × 6

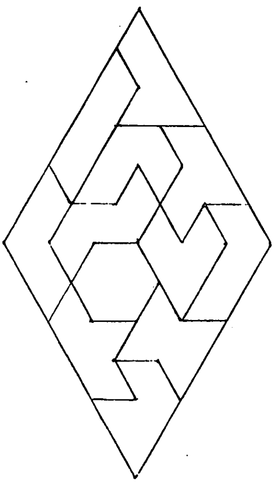
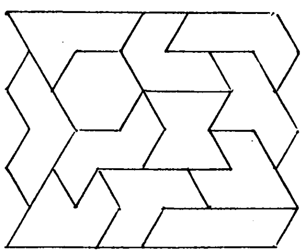


図11 ヘクサモンド の
ジグザグ 長方形
6 × 6



いくつかのポリオミノをくっつけて大きいポリオミノを作るとき、条件として面積の和が一致することは当然必要ですが、テトロミノ・ヘクソミノのように一揃い全部を使って長方形ができないことの判定に用いる符号特性数または簡単に符号数（これは私の命名）というものを考えます。

(一) ポリオミノの符号数

一つのポリオミノPに対して、Pを形成している隣り合う二つの基本正方形が共有している辺の両側で、反対になるように、正符号＋と負符号－を、Pの全部の基本正方形につけたとき、＋の数と－の数の差をPの符号数といい、カイ χ(P) で表します。（χ はギリシャ文字カイの小文字）

右の＋と－の代りに白と黒にぬり分けたり、二色の市松模様にしてもよい。

この符号数について次の二つの公式が成り立つ。

公式一

二つのポリオミノP_1とP_2をいくつかの辺と辺をくっつけてできた形P（これもより大きい一つのポリオミノになる。）の符号数はP_1、P_2の符号数の和または差になる。これを式で表わすと

$\chi(P)=\chi(P_1)+\chi(P_2)$ または $\chi(P_1)-\chi(P_2)$ となります。

図12　テトラヘクス の
平行四辺形
7 × 4

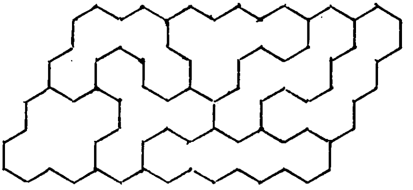


図13　テトラヘクス の
ジグザグ 長方形
7 × 4

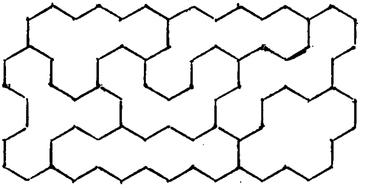
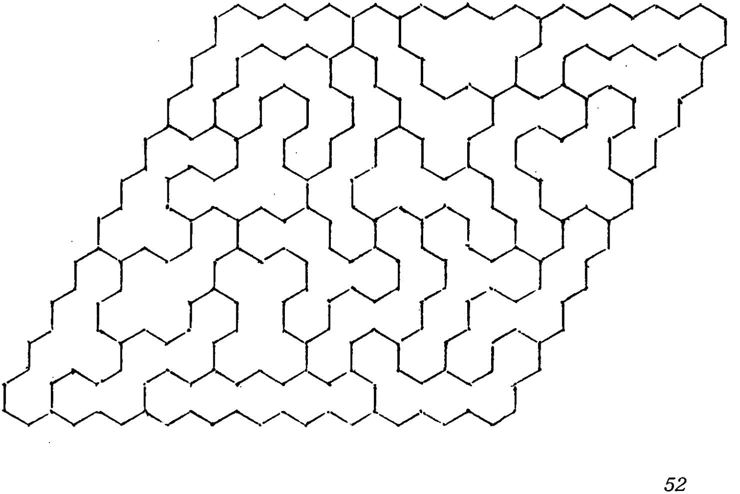


図14　ペンタヘクス の 平行四辺形　11 × 10



証明（説明程度にします）

P_1、P_2ともに、＋の数が－の数より多いか等しいようにつけてあるとします。P_1とP_2をくっつけたとき、＋と－がそのままでよいときはPの符号数は和となり、一方の符号を反対符号に変える場合は差になります。**（図17）**

P_1、P_2、P_3をくっつけてPができる場合は

$\chi(P)=\pm\chi(P_1)\pm\chi(P_2)\pm\chi(P_3)$（三個の±はどれも＋か－の一方をとる）が成り立ちます。

四つ以上の場合も同様です。

公式二

m×nの長方形のポリオミノを大文字のアール$R_{m,n}$で表わすと、その符号数はどちらか一辺が偶数なら0で二辺ともに奇数なら1です。これを式で書くと、

$\chi(R_{m,n})=0(mn: \text{even})$,　$=1\ (mn: \text{odd})$

となります。

証明（説明）

長方形に偶数の辺があれば、市松につけた＋と－を偶数の辺ごとに消していくと全部消えて0になる。ともに奇数の辺のときは端の一列とのこりの長方形に分けると、一列は奇数個だから符号数は一で、長方形は一辺が偶数だから0となり、公式一により符号数は1となる。

図15　デトリクス の 正六角形
（一辺 4）

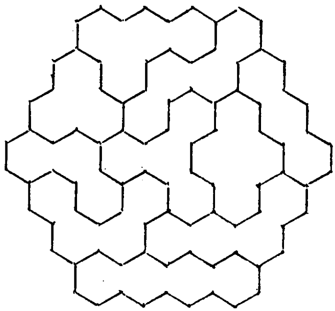


図16　トリスフェロ
十ダイスフェロ の
正方錐（一辺 3）
（右側 各片と名称）

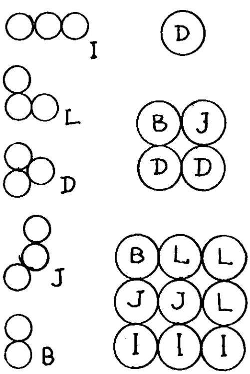


図17　ポリオミノ の 符号

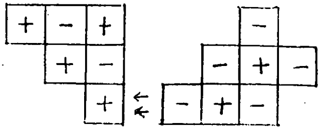


図19　ポリヘクス の 符号

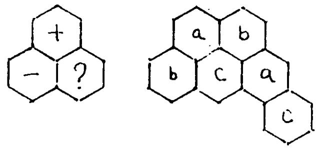
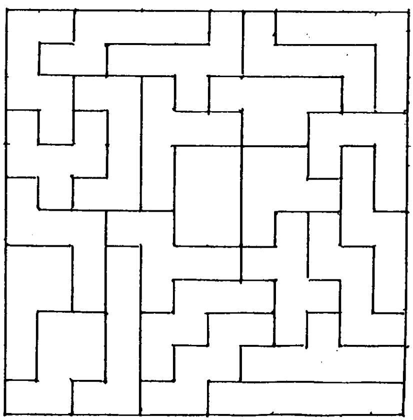


図18　ヘクソミノ セロ の正方形　12 × 12



(例一)

テトロミノ　五片の中符号数が0のもの四個と2のもの一個（Tの形の片、**図5**）この五片で長方形ができるとすると、二辺の積が二十で偶数であるから、公式二によってその符号数は0になる筈である。しかし、テトロミノ五片の符号数四つの0と一つの2をどう加えたり引いたりしても2か−2になるだけで0にはならないから長方形（5×4、2×10ともに）できない。

(例二)

ヘクソミノ　三十五片の中符号数0のもの二十四個と2のもの十一個がある。ヘクソミノの基本の正方形の数は二百十で偶数であるから、可能な直方形の符号数はすべて0である。しかし、三十五片の符号数は0が二十四個と2が十一個で、これらをどう加減しても0にならないから長方形はできない。

そこで、市販のヘクソミノは19×11の面積二百九の長方形の周りのどこか一ヶ所に基本正方形一個をつけた形（**図9**）のものを用いている。この一個はどこにつけてもいいのではなく、符号数を0にするため**図9**の＊印の所につける必要がある。

(例三)

ヘクソミノゼロ　ヘクソミノ一揃い三十五片は数が多すぎて、詰合せパズルとしては難しすぎます。そこで符号数が0のもの二十四片をヘクソミノ0（ゼロ）と名付けると、（私の命名）こ

れらをくっつけてできる形（ポリオミノの一種）の符号数は0であるから、長方形はどれもできる可能性がある。とくに基本正方形の数は6×24で百四十四であるから、一辺が十二の正方形（**図18**）が考えられるが、実際可能で、他の16×9、18×8等の長方形も可能である。

ペントミノ十二片、ヘクソミノ三十五片等は基本の正方形の同じ個数をくっつけた、面積の等しい片の集まりであるから、何となく似ている（兄弟姉妹かいとこのように）。さらに符号数の同じものを見ると表現するのは難しいが、よりよく似ているような気がする（**図7、9、18**）。

(二)ポリアモンドの符号数

一つのポリアモンドPを作っている基本正三角形に、ポリオミノのときと同じように、隣り合う基本正三角形に正符号＋と負符号－を共有する辺の両側で反対になるように、Pのすべての基本正三角形につけ、その＋と－の個数の差をPの符号数といい、カイχ(P)で表わします。

ポリアモンドの符号数についても先の公式一が成り立ち、詰合わせの可・不可の判定に用いることができる。しかし、この場合、正負の符号をつけなくても、基本三角形の上向きのもの△と下向きのもの▽がそれぞれ＋と－に対応すると考えれば、それ等の差から符号数は簡単にわかります。

(三)ポリヘクスの符号数

第二章(四)のヘクサモンドの等角六角形、菱形等はすべてそのポリアモンドの符号数は0です。

ポリヘクスに対して、ポリオミノ・ポリアモンドと同様に隣り合う基本の正六角形に、正・負の符号をつけようとしても、図19の正三角状のトリヘクスの部分で、二個に＋と－をつけても、三つ目の正六角形にどちらにも反対の符号がないのでつけられない。

いろいろ考えた結果、三つの符号、例えばa・b・cまたは三原色のようなものを用いるとつけることができることがわかった。(図19、文献九)

四、ポリスフェロ

先程申しましたように、ポリスフェロの意味は基本の形が球の場合で、基本の正方形n個のポリオミノをnオミノn-omino、基本の正六角形n個のポリヘクスをnヘクスn-hexと呼ぶことにすると、一揃いのnオミノの各片の基本正方形と一揃いのnヘクスの基本正六角形をすべて同じ大きさの球でおきかえた形の片全体を一しよう考えた全体の一揃いをnスフェロn-sferoと呼び、いろいろのnについての総称がポリスフェロpolysferoです。

これを後に述べる雑誌（文献一、二）にはじめて発表したときは、ポリボールpolyballと呼んでいましたが、京都学園大学の論集に書くときになって、球を表わすいろいろの外国語を調べた結果、

sphere（英）、sphère（仏）、Kugel（独）、esfera（西）、sfera（伊）、sphaera（ラテン）、

sfero（エスペラント）等を参考にして、スフェロ（エスペラントと同じ）をとり、ポリスフェロにしました。（文献十）理由は、ボールは競技用のゴムか皮等の軟かいたまのイメージなのに対して、スフェロ sfero のフェル fer はフランス語の鉄（原子記号 Fe）で固いたまから来たらしく、学術用語としてはより良さそうに思ったからです。

そこで、このポリスフェロは平面的にはすき間なくくっつけて並べることができないので、三次元で考えて、立体的な詰合せパズルができないかと、長い間考えていたのですが、昭和四十六年の十二月下旬ごろ、家でお盆に盛ってあるみかんの山を見ていたときに、次のことに気がついた。球を、例えば、パチンコの球のように、ピラミッド（正方錐）型につみ上げたとき、水平面はポリオミノから作ったポリスフェロの正方格子状であり、四つの側面の斜面はポリヘクスから作ったポリスフェロの蜂の巣状になっていて、置く方向を変えれば両者を一しょに三次元的に詰合せできることである。

まず、手ごろな個数を考えて、四つの基本の球からできる、テトロミノとテトラヘクスの合体したテトラスフェロ tetrasfero は棒状の片だけが両者共通なので、テトロミノ五個とテトラヘクス七個の和から一個減って十一個（十一種）となり、基本の球の総数は四の十一倍で四十四個となります。（図20）

丁度、この四十四個の球でできる立体の形はピラミッドは数が合わないのでだめで、一辺が四個の球からなる正八面体（二個の正方錐を底面を上下にくっつけた形）状に組み上げたときの球の数を調べると、上から順に数えて（下からでも同じですが）

$$1+4+9+16+9+4+1=44$$

となります。これはテトラスフェロの球の数とピッタリ一致するので正八面体に組み上げできる可能性があることがわかりました。

このことの多分一年位前ですが、東京で秋の学会（日本数学会）があったとき、渋谷の東急百貨店本店で買っておいたドイツの組立て玩具クゲリ Kugeli（表面に二十六の穴のある球と数糎程の長さのロッドが沢山入っていて、豆細工のように球とロッドをくっつけて、ベッド・自動車・小屋等を組み立てるもの）のたまを、中にあるロッドは長すぎるので、向日神社（向日市）の近くの模型飛行機屋で細い竹の棒を求め、短く（三粍ぐらい）に切ったものでくっつけて、テトラスフェロの試作品ができたのが、年が明けて昭和四十七年正月の三日です。正八面体状に組むのに下に支えるものが必要なので、家内が考えてくれたビニールの菓子箱を切って作った底のない正方錐を逆にした台の上に十一種のテトラスフェロを詰め合せ、正八面体の第一号が十五分位ででき、パズルになることがやっとわかりました。

ポリスフェロとこのパズルのことは、同じ昭和四十七年の「数学セミナー」と「現代数学」の

図20　テトラスフェロ　(右下 名称の文字)

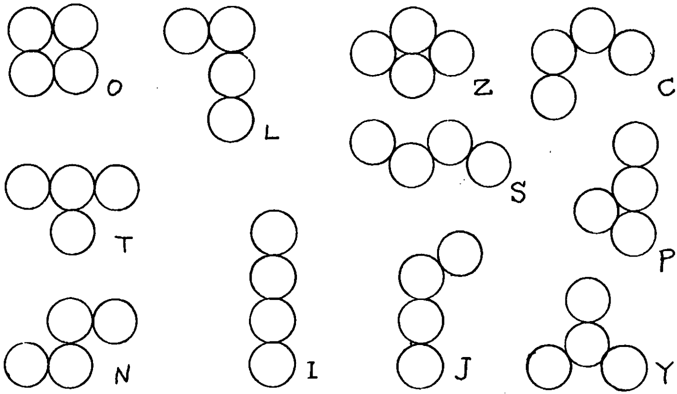


図21　テトラスフェロ の 正八面体　I 型
　OTCL (分類記号)

O	C	O	S	N	P	C	L	L	L	T	N	Y	T	N	T
	O	P	C	O	P	C	S	N	L	S	T	Y	S	Y	
			Z	Z	P	J	Z	Z	Y	J	J	J			
						I	I	I	I						

H.7.3.16.

図22　テトラスフェロ の 正八面体　II 型
　JPOS (分類記号)

J	C	C	T	N	C	O	O	C	S	P	N	S	P	N	P
	Y	J	T	T	J	O	O	N	J	P	L	S	L	S	
			T	Y	Y	I	I	I	I	L	Z	Z			
						L	Y	Z	Z						

H.6.5.27.

七月号に、表題と説明を少し変えて発表しました、（文献一、二）そのすぐ後に、竹中貞夫常務（三高昭和十五年卒）のお世話で日本クロス工業（現在「ダイニック」）から、テトラTETRAの品名で市販されました。（その後アメリカと日本で特許取得）。

テトラのセットの中には、テトラスフェロ一組とダイスフェロdisfero一個が入っていて、正八面体の他に、テトラスフェロの適当な七片とダイスフェロで4×7＋2で三十になるので、一辺が四個の正方錐（1＋4＋9＋16で三十個）と一辺が同じく四個の正三角六面体（二個正四面体を一つの面でくっつけた六面体、球の数は1＋3＋6＋10＋6＋3＋1で三十個、テトラの中の説明には間違って、正六面体となっています。）ができるようになっています。残念なのは、テトラスフェロ十一片とダイスフェロ一片の計十二片が、2片ずつ同色でクゲリと同じ六色になっていることで、テトラスフェロは十一色にすべきだったと思います。

テトラの発売直後、朝日新聞の全国版に、「三次元パズルゲーム登場」の見出しで記事が出ました。（文献三）

正八面体以外の例を述べると、トリスフェロtrisfero四種とダイスフェロ一種で基本の球の数は3×4＋1の十四個なので、一辺が三個の正方錐（球の数は1＋4＋9で十四個）を作ることができます。**（図16）**

最後に、テトラスフェロによる正八面体を組む、異なる方法の数は、回転で一致するものと鏡

像となるものを除いて、東大の川合慧氏がコンピュータによって七千四百八十二種であることを確かめ、京大の数理研の研究集会で発表して居られます。（文献五）

最後に、テトラによる正八面体の詰合せが多数できたときの結果の表示法とその標準化による整理法を述べます。

十一種のテトラスフェロの各片の正八面体の中の位置を表わすのに、各片を表わすアルファベットの大文字（片の形に似せて名付けてある**図20**）を四個ずつ使って、水平断面を横に並べて表します。中央に4×4の正方形状に十六文字をかき（**図21、22**）、その左右に次の段の3×3の正方形状に九文字を、さらにその両外側に2×2の正方形状に四文字を、その両外側に頂点の片の名をかきます。（この左右はどちらが上でも下でもよいし、三方行にある4×4の正方形のどれを中央にかいてもよい）とくに、棒状のアイI片は長いから、必ず4×4の正方形のどれかの辺から一列目（I型）か二列目（II型）に入っています。

図21の左上の文字OTCLは分類記号で、同じ結果を重複して記録することをさけるため正八面体の方向を次のように標準化してから、I片と離れた四頂点にある片の名を並べてあります。標準化の手順を示しますと、

「I片を含む4×4の正方形をI片が真中より下に横向きになるようにおき、そのときの正八面体の上下の頂点（**図21**の左右の端）の片の名称OとTをかき、その後にIの属する正方形の上

の辺の両端の片の名称をアルファベット順にCとLとかき、四文字の記号OTCLとなります。」

（**図22**の表示も全く同様です。）

この表示法で、中央の4×4の正方形をそのままにして、左右の表示をそのまま入れかえますと丁度鏡像の表示が得られます。

ここに示した正八面体の**図21**はI型で、現在までに得られた二千種近い解の中で、最近できたもので、テトラヘクス系の六つの片CJPSYZが側面に平行な四つの面に平行などの方向にも使われ、テトロミノ系の四つの片LNOTが互いに直交する4×4の正方形に平行な三つの面に平行などの方向にも使われている例の一つです。図22はI片が二列目にあるII型の例です。

以上で本題のお話を終りますが、一寸関係があると思いますので申しそえます。既刊の紅萌抄第二巻にある沢田氏（昭和二十二年理卒）のお話の中にあるポリオミノの正方形を立方体におき変えた形は並通ポリキューブ polycube と呼ばれています。

今日申し上げたテトラのセット二組を三高会館に寄贈しておきますので、興味をお持ちの会員の方は一度お試し下さい。

もし機会がありましたら、基本の形が「線分」の場合のポリロッド polyrod、「立方体」の場合のポリキューブ等についてお話したいと思います。これで今日のお話を終ります。

参考　文献

一　数学セミナー、一九七二年七月号、表紙 テトラボール、同本文 新立体パズルポリボール
二　現代数学、一九七二年七月号、テトラボールの正8面体
三　朝日新聞、一九七三年二月一日朝刊、「三次元のパズルゲーム」登場
四　現代数学、一九七二年十月号ー七四年五月号、ポリオミノ（八回連載）
五　京都大学数理解析研究所　講究録二一七、一九七四年七月、はめこみパズルのプログラム（東大、川合　慧）
六　数理科学、一九八六年一月号、箱詰パズルの数理
七　京都学園大学　論集、一九八九年一七巻四号、ポリオミノ
八　同、一九八九年一八巻一・二号、ポリアモンド
九　同、一九八九年一八巻三号、ポリヘクス
十　同、一九九〇年一九巻三号、ポリスフェロ

（三、五　以外　筆者）

回覧した資料

文献　一、二、三
パズル（上から名称、箱の形、品名）

ペントミノ、長方形（10×6）、プラパズルNo.5
ペントミノとテトロミノ（正方形の片）、正方形（8×8）、プラパズルNo.8
ヘクソミノ、ハンドバッグ型（19×11＋1）、プラパズルNo.600
ヘクサモンド、等角六角形、プラパズルNo.6
ペンタヘクス、平行四辺形状（11×10）、プラパズルNo.22
ダブルテトロミノ、長方形（8×5）、プラパズルNo.782
テトラスフェロ、正八面体状（一辺が4）、テトラ

（京都府立医科大学名誉教授）