# 数あれこれ（63・3・19）

奥川光太郎（昭7理甲）

ご紹介頂きました奥川でございます。数学を専門にしています者が「数あれこれ」というような題でお話しますので，聴きに来られるかたは少ししかなかろうと申していましたが，こんなにも沢山来て頂き，特に私が大学へ入学して初めての年にお習いしました小堀先生までお見えになり，何か初めて教壇に立った時のような胸のときめきを感じまして、うまく滑らかにお話できるかどうか，常々学生にノートをさせるためにゆっくり話す癖がついていますので，心配いたしますが，どうも皆様お出でくださいまして有難うございました。

これから話の半分か，あるいは，それ以上になるかも知れませんが，数に関する放談とでもいうべき大胆なようなことを致しまして，その後でちょっとオーソドックスなことをお話し，最後にまた私見を少しだけ述べさせて頂いて終りたいと考えております。

1+1=2　と限らないというようなことが，いろんな人により，いろんな意味で語られており

ます。私が三高に勤務するようになってまだ余り年数の経たない頃に当時京大医学部の前川教授，ご承知のように三高出身でございましてすでにお亡くなりになっておられますが，この前川先生が京大医学部の入学試験に，$1+1=2$　と限らないことにつき論ぜよという意味の問題を出題なさいました。そのことを私は聞きまして、当時の旧制高校出身の受験者たちが果たしてどんな答を書いただろうか、教えて貰えるものなら知りたいと秘かに思ったことでしたが，もちろんどんな様子か知りません。ところである時、数学とゆかり深いある応用分野で，ある論文草稿を評価なさった折，その論文は数学的方法を展開して結論づけてあるのでございますが，その応用分野のかたがたではその評価が低いというのが圧倒的意見でありました。ところが，その著者は，数学的方法の展開の仕方には間違いがないから低い評価を受けるのは承服しかねると抗議をしたという，このような経緯がございました。元来，数学を他の分野に応用しようとしますと、そこにおのずからの限界がありまして、使ってある数学的内容自身にはミスがなくても，それがその応用分野としての評価が高いかどうかということは，その分野のしっかりした専門家でないと判らないことでして，数学者が見てもそれに対して何とも言えないことでございます。冒頭の　$1+1=2$　であるという命題は純粋数学では正しいことでありますが，それを当てはまらない所へ無理に応用しようとしましてもこれは無力でございます。このように純粋数学の立場で言ってしまえばそれで終りでございますが、実はここの問題は純粋数学の立場だけから言うべきものでなく，

数学を応用する領域内の立場も込めて考えるべき問題でございます。

もっとも，$1+1=2$ と限らないということは，やはり含蓄のある言葉と思いますので，それを言われるかた，また，聞かれるかた，それぞれのお考えに任せておく方がよく，それに関する下手な饒舌を加えますのはいかがなものかと思いますが，そのような問題について，私としては少し大胆な独断的な話になりますが，お話しさせて頂きたいと思う次第であります。

さて，1と申しましても純粋数学においての1だとしては不適当である場合が問題であります。

例えば，貯金するお金を10万円を単位にとって1で表し，それを三分の利率で貯金しようというときには $1_{0.03}$ と書くことにします。別の10万円がありまして，これは五分という利率で貯金しようというとき（近頃の貯金に五分の利率があり得るかどうかは別問題として）$1_{0.05}$ と書きます。この2つを加えるといいましてもいろいろ意味がありましょうが，ここではただ並べていっしょに考えるという意味としますと，金額は20万円になりますが利率が四分であるのと同じことになり

$$1_{0.03}+1_{0.05}=2_{0.04}$$

となる訳であります。

また別な例としまして，最近は住宅公団が売出す住宅でも1億円というものもあるそうですから，大金ですが思切って10億円を単位にとって1で表し，これをAという人なり法人なりが持

って勝手に使えるような資金であると考えて $1_A$ で表します。この10億円と別の10億円をＢという人なり法人なりの同様な資金として $1_B$ で表します。これらを加えるというのもやはりただいっしょにして考えるという意味としますと

$$1_A+1_B=2_{AB}$$

と書けます。この場合はいろんなことが考えられます。

このＡとＢが同一人物であるとその才覚によって答の $2_{AB}$ の実質は違って来ます。もしＡもＢも私なら $2_{AB}$ は意味をもちません。私が10億円とか20億円とか持つようなことは金輪際考えられず，持ったとしてももう20億円も30億円も40億円も同じことで却って処置に困り命をちぢめ無に等しいかも知れませんので $2_{AB}$ は意味をもちません。ＡとＢが違った人物なり企業法人であるときには，ＡとＢの関係によって $2_{AB}$ の値打ちがいろいろ違って来ましょう。

もう１つの例として，成田からニューヨークまで日航の直行便でエクゼクティブ級の搭乗券代を単位にとって１で表し，Ａという人の搭乗券代 $1_A$ とＢという人の搭乗券代 $1_B$ の２人の同乗の場合の合計については

$$1_A+1_B=(2-x)_{AB}$$

と表しますと，ＡとＢが夫婦でないならｘは０でして，夫婦なら割引きの規定があってｘは正のある値になる訳です。

このように卑近な例を申しましたが、例は後ほどでも卑近なものばかりなるべく多くいたしたいと思います。

以上の問題に対しまして，普遍的な扱いの１つの仕方ではないかと思われることを、まだ熟してはおりませんがお聴き願いたいのであります。

実用上の量を表します実数 $a$ には何か状況が加味されているとし，状況 $\alpha$ の加味されていることを示すために $a_\alpha$ で表すことにします。このサブスクリプトの $\alpha$ は，さきの第１例の貯金の利率のような簡単な数値であってもよく，また，第２例で申しました人なり法人なりというような複雑なものであってもよいのです。もう１つ $b$ に状況 $\beta$ の加味された同様な量 $b_\beta$ を考えましたとき，これらを加えるという意味もいろいろありますので，プラスの記号を使わないで $S$ を用い，$S(a_\alpha, b_\beta)$ とします。これが公式

$$S(a_\alpha,\ b_\beta) = F(a, b\ ;\ \alpha, \beta\ ;\ S)_{\psi(a, b\ ;\ \alpha, \beta\ ;\ S)}$$

のようにまとめられるという考え方です。ここの $F$ は実数でして $a$ と $b$，$\alpha$ と $\beta$，そして $S$ によりその値が決まります。また，サブスクリプトにある $\psi$ は $F$ に加味された状況でしてやはり $a$ と $b$，$\alpha$ と $\beta$，および，$S$ によって決まります。$a_\alpha$ と $b_\beta$ に $S$ という加え方をしますと答えは右辺のような状況つきの量 $F_\psi$ であるという訳です。これら $a_\alpha$，$b_\beta$，$F_\psi$ は確率のたぐいであってよいと思います。数学上できちんと理論構成のできています確率変数（専門的な言葉

で恐縮ですが）であってもよろしく，また，私が気づきましたところでは工学方面で10年余り以前にすでに扱われていました fuzzy theory に現れる fuzzy value であっもよいでしょう。fuzzy theory はいま工学や経済学で理論なり応用なりが試みられつつあるという段階であろうと思います。訳語としては今年の京大経済学部の入学試験のA日程の問題中にそれを「あいまい理論」としてありましたが，訳語はまだ広く定っているとは言えないでしょう。

上述の公式を1つ作上げてあらゆる場合に当てはまるようにしようということはできるはずもなく不可能でありますが，個々の特殊な場合に公式の形が求まりますれば，その特殊な場合は数学に載ることになり，こうして数学に載せてみてそれが重宝ならばその特殊な公式は評価が高くなる訳でありましょう。いまそのような評価の高い公式は私には作れませんが，事柄の筋は上述のようなものであろうと考えるのでございます。

例えば，最初の貯金の話の場合，利率 $\alpha$ で貯金したい a 円と利率 $\beta$ で貯金したい b 円とを合併しますと，金高は a+b 円になり，利率は $\alpha$ と $\beta$ の荷重平均になり，

$$a_{\alpha}+b_{\beta}=(a+b)_{\frac{a\alpha+b\beta}{a+b}}$$

という公式が得られます。この公式は作れても大した役には立ちませんが——。

別の例として私の持っています極く簡単な電卓に関したことを申しましょう。それは8ケタの

電卓でして加減乗除と開平だけができます。使いますのは数理統計学の講義に当ってと身辺の雑事の計算のときですが，加法の答の出かたは次の通りです。電卓の数字盤を<u>まっ正直</u>に読取るという意味で数にサブスクリプトとして「デ」を書添えましょう。整数部分が 8 ケタ以下で小数部分も込めても 8 ケタを越さない正の 2 つの数 $a_{デ}$，$b_{デ}$ に対して加法の答えは，$a+b<10^8$ の場合には

$$a_{デ}+b_{デ}=(a+b\text{の 8 ケタ未満を切捨てた結果})_{デ}$$

となり，$a+b\geqq 10^8$ の場合には

$$a_{デ}+b_{デ}=\begin{pmatrix}a+b\text{ の整数部分 8 ケタ未満を切捨て}\\ 10^8\text{で割った結果}\end{pmatrix}_{デ}$$

となります。まとめて，$a_{デ}+b_{デ}$ の公式としては

$$a_{デ}+b_{デ}=\begin{pmatrix}\text{電卓で }a+b\text{ をおこない，結果の}\\ \text{数字盤を}\underline{\text{まっ正直}}\text{に読取った値}\end{pmatrix}_{デ}$$

を採用します。たとえば

$$87654321_{デ}+22222222_{デ}=1.0987654_{デ}$$

でして，87654321 と 22222222 の真の和 109876543は数字盤には現われません。元来 8 ケタもある数値の間の加え算をする必要は私には実際は起こりませんが，多変量数理統計学の数値計算な

ど扱いますと５ケタの数の間の掛け算をしなければならず電卓の８ケタより溢れてしまうことがある訳です。５ケタまで計算しておきませんと途中で上位３ケタが相殺されることが多くて具合が悪いという事情がありますので，掛け算の方にむしろ上述同様の公式を使うのですが，今日は初めから加え算にこだわっていますので，ここでは加え算の公式だけ申しました。電卓では完全に正しい答が出ないことがあっても上述の公式で十分役立ちます。

ここで付足しますと，上述のような状況つき実数 $a_\alpha$，$b_\beta$ の加法 $S(a_\alpha, b_\beta)$ では一般には交換法則や結合法則が成り立たないかも知れません。実際

$$(87654321_{テ}+22222222_{テ})+11111111_{テ}$$
$$=1.0987654_{テ}+11111111_{テ}=1.0987654_{テ}$$
$$87654321_{テ}+(22222222_{テ}+11111111_{テ})$$
$$=87654321_{テ}+33333333_{テ}=1.2098765_{テ}$$

もう一つの例として，Ａという地点からＢという地点までの道のりを測定するとしましてその測量の精密の度合を標準偏差で表しましょう。標準偏差というのも専門的な言葉で恐縮でございますが，同じ道のりを何度も測定しますと誤差がありますので少しずつ変わりますがその数値のちらばりの程度を示すのが標準偏差であります。だから標準偏差が大きければそれだけちらばりが大きい訳で実は測量の精度は悪い方になり，反対になるのでありますがいまは精度と申して

もお判り頂けると思います。AとBの間を標準偏差 $\sigma$ キロメートルという精度で測量した結果が x キロメートルであったということを示すために $x_\sigma$ と書きましょう。また，この地点Bから他のCという地点までの道のりを標準偏差 $\sigma'$ キロメートルという精度で測量した結果が x′ キロメートルであるという意味で $x'_{\sigma'}$ と書きます。そのときAからBを経てCに到る道のりの測量値は x+x′ となりますが，これの精度を表す標準偏差は $\sqrt{\sigma^2+(\sigma')^2}$ であり，

$$x_\sigma + x'_{\sigma'} = (x+x')_{\sqrt{\sigma^2+(\sigma')^2}}$$

となります。これは数理統計学で周知のことをこのお話の流儀で書いただけのことでございます。

さきにも申しましたように往きがかり上で寄せ算について話をいたしましたが，以上のようなことは掛け算につきましても同じように言えます。また，一項演算でもよいのです。状況 $\alpha$ のついた数値 a に対してなにがしかの法則で決って来る状況つき数値があるような場合を一項演算と申します。加え算とか掛け算とかは2つある数値を加えたり掛けたりしますから二項演算といいますが，いま申しましたのは一項演算でしてFで表し，

$$F(a_\alpha) = G(a\,;\,\alpha\,;\,F)_{\psi(a\,;\,\alpha\,;\,F)}$$

のような公式，ここに数値 G は a, $\alpha$, F によって決り，状況 $\psi$ も a, $\alpha$, F で決まるとき，さっきと同じようなことがこれについても言える訳です。例として余り良くはありませんが，例えば，a を日本人の年齢としまして $\alpha$ は経済状況や何やら彼やら込めた生活状況ということに

しまして，その国税で受ける老人控除額としましょう。a が若い数値なら G は 0 ですが，ご承知のように政令では決まっていまして65才以上で収入が何百万円以下とかなら老人控除額が幾らかが決る訳です。

ついでながら，60才位でも老人というべき人もあれば，70才位になってもまだ老人といえない人もあるんじゃないかというように木目細かに考えようとしますと，果してどこからが老人というべきかという疑義が生じます。このようなことについて1914にフランスのボーレルが著しました書物の中に「麦の山」という例え話があります。その議論はなかなか面白く参考になりましょうが，時間のつごうもあり割愛させて頂きます。それは要するに先刻も申しました fuzzy theory のようなものを当てはめればよかろうかという考え方であります。差障りがあるかも知れませんが，降水確率というあれなんかも私は　「確率」というよりは「fuzzy value」とよべば良かろう，あれはどういう風に算出しておられるか，詳しく解説してある書物もあるらしく関心はありますもののまだ見ておりませんが，どうも fuzzy value とよんだ方が良いのではないかと思う次第です。そのようなことが先刻も申しました通り工学方面で早くから考えられていますので，数学の専門家ももう少し左様な方面に関心をもつべきでなかろうかと存じます。すでに関心をおもちのかたもあろうか，私の眼界の狭さのためにこのように申すのかも知れないとも思います。

以上まことに独断的で熟していないような話でして，将来私の意見も変るかも知れないことを大胆に申上げてみた訳でございます。この後，少しだけ，オーソドックスな話に入りまして，純粋数学での数だけを考えることにいたします。

純粋数学で普通に数と申せば複素数のことでして，系統図をかきますと次の通りになります。

- 複素数
  - 実数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数 ＝ 自然数
        - 0
        - 負整数
      - 分数
    - 無理数
  - 虚数

自然数はものの個数を表す1，2，3，4，……のように個数から抽象された数でして，それから0，そして負の整数，これらを総称して整数です。そのほかに分数，これは整数と分数と対立させましたから，ここでは分数は狭い意味にとり，分母も分子も整数であり分母は0でなくそして分子が分母で割切れないという意味の分数です。整数と分数を総称して有理数，そのほかに無理数があります。これらを実数，そのほかに虚数があります。実数と虚数を総称して複素数となります。虚数とか複素数とか申しますと，そういうものもあったっけというようにお感じになる

かたもいらっしゃると思いますので一言いたしますと，複素数とは実数単位という1と虚数単位という i とから組立てられ，1に実数 a を掛け，i に実数 b を掛けて加えた a+bi という形の数であり，これを普通の代数通りに計算し，ただ i の二乗がでて来れば −1 とおくという計算のやりかたをすればよい訳です。普通に数といえばこの系統図の中のものであります。

複素数なんかは実感がもてないようなものとお感じになるかたも少なくないのではないかと思います。私とある心安い友人とで，まだずっと若かった時代ですが，お茶呑話をしていましたとき，その友人が「複素数というような人工的なものを使って得られる結果を応用すると，何か信用できないような気がする」という意味のことを，フッと言ったことがあります。そのとき私は確か「実数だって人工的なんだよ，実数であろうが虚数であろうが，正当に議論されたものを正当に使えばいいんだ」というような意味のことを言ったと思います。それでも，実際に実数は量と関係しまして直線上にキチンと配列され，まことに実感のあるものでございます。しかし，複素数でも，大概のかたはご承知のように，平面の上にキチンと表示しまして，その上でいろんな図形的観察ができますので，まったく実感のあるものです。場面によっては，球面の上に複素数を表示することもございます。

以上が普通の数であります。原始時代から現代にわたりまして，数の考えの発生とか進化とか，あるいは，扱いとか考えの堀り下げとか，関連する話題は沢山ございますが，そのような事柄に

はほんの少しだけ触れることにしまして，もっと先の方へ話を進めたいと思います。

私は数学史の造詣がありませんので間違いを申しますことを恐れるのでありますが，もし間違いを申せばどうかご叱正をお願いいたします。

メソポタミヤと古代エジプトと両方でご承知のように大昔から，案外に非常に高い程度の数学的事項が知られ，また，応用されておりました。年代は大雑把に言いましてBC 5世紀からAD 4世紀にわたる辺りのギリシャ人たちが，そのメソポタミヤ・古代エジプトの数学的事項を受継ぎ，学問としての数学に仕上げましたことはご承知の通りであります。ギリシャでは正の数は量と関係させまして有理数も無理数も実際上はチャンと扱っておったと言ってよいでしょう。しかし，0とか負の数とかは扱っていませんでした。その後，中世にヨーロッパで数学が衰退しました時代に，7世紀から10世紀の頃のアラビヤでギリシャの数学が受継がれ，インドで生れました0をとり入れ，数学をかなり発達させましたが，やはり負の数は扱わなかったようです。このことやその他も小堀先生のご本なんかの受売りでございます。このように負の数はアラビヤでも扱われませんでした。後にアラビアの数学がヨーロッパへ逆輸入されましたのが12世紀頃からでしょうか。そして13世紀から14世紀頃にかけてヨーロッパで再び数学が発達しはじめます。その頃以後に負の数が0や正の数と同格で扱われるようになったと思います。ところが虚数になりますともっと新しいのでありまして19世紀に入りましてから数学者一般に普及したと言ってよいと思

います。ドイツのガウスが1801に複素数の中でみごとな整数論をまとめまして，これ以来，数学者が複素数というものを認識し，数学者全体に普及したのであります。

遡りますがギリシャ時代から段々と進歩して来ました数学が17世紀の頃，ニュートンとかデカルトで代表される時代に，グンと一大発展をいたします。そしてその後は微分学・積分学を根幹にした解析学を中心とする数学が進展して参ります。先刻申しましたガウス以前にも，虚数という風なものを使っている人ももちろんあるわけでして，そういう複素数を使う解析学も段々現れて来ておった次第です。ガウスについで現れましたのがリーマンでして，そのガウスとリーマンで代表される時代が19世紀の中頃までと思います。その頃までに複素数の解析学（複素数の値をとる関数の解析学）の進歩が物理学の進歩と相たずさえ両方発達したと言っとよいと思います。またその頃には数学の中の他の分野もかなり発達して参りますが，このような状態でガウス・リーマンで代表される時代に数学は第二の大発展をいたします。そのような所に複素数の貢献が非常に大きいのではないかと思います。

その後，こんどは19世紀の中頃以後になりますと，現代化と申したい状況が出て参ります。数学はもともと抽象的なものでありますが，特に現代的抽象化というべきことが19世紀の終りから20世紀の初めにかけて現れます。このような状況が原動力になって数学は20世紀の現代になってから第三の大発展をしたと言ってよいと思う訳であります。

話が多少横にそれましたが，とにかく複素数は数学の発展にかなり貢献したと思いますが，本日は複素数以外にも数と呼ばれるものがあるということを覚えて頂きたいと，このような思いで「数あれこれ」という題にいたしました。題をつけてみますと前半に申しましたようなことも数に関係しますのでお話しようかということになった訳であります。

ここでちょっと断っておくべきかと思いますが，ヨーロッパの数学用語を邦訳しますのに明治10年以来いろいろ訳されたのですが余りにもいろんなものに「数」という字が使われ過ぎています。最も手近なところで申しますと，「12は３の倍数である」，「３は12の約数である」というのはものが数ですからよろしいのですが，多項式になりまして「$x^2-y^2$ が $x-y$ の倍数である」，「$x-y$ は $x^2-y^2$ の約数である」といいますがものは多項式ですから「倍多項式」とか「約多項式」とか呼んだ方が好ましく思うのですが，そのような用語を使った中学校や高等学校の教科書を作れば文部省の検定に通りません。数学ではもっと抽象的な場面では倍数・約数に相当するものを「倍元」・「約元」と呼びますが，英語でいえば multiple，divisor というようにヨーロッパの言葉には「数」という字が入っていませんのでまことに具合がよい訳です。他にもいろいろありまして日本では数でないものに数という呼称がついています。そのような「数」はもちろんこれからの話に入らないで除外されております。なお，別系統の数として「順序数」というようなものもございますが，これもこれからの話から除外いたします。自然数は natural number,

有理数が rational number，無理数が irrational number， 実数が real number，複素数が complex number，虚数は imaginary number， すべて「number」がついています。このようにヨーロッパでも「number」がついているようなものを考えるわけでして，最も広くいえば hypercomplex numbers でしていろいろありますので複数にしておきます。このようなものが同じ系統で number と呼ばれるものであります。

このうちで歴史的には特殊な四元数が初めに現われ，1858に英国のハミルトンが物理学に応用しようとして考え出したということでありますが，物理学への応用は予期通りにはならなかったようです。複素数が 1 と i の 2 つの単位から組立てられますのに対し，四元数は 1，i，j，k の4つの単位から組立てられ，単位に実数 a，b，c，d を掛けて加えた $a+bi+cj+dk$ のような形のものであります。これを約束

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$ij=k=-ji \quad jk=i=-kj \quad ki=j=-ik$$

のもとで普通の代数のように計算するのでありますが，ただ掛け算のときに順序の交換ができないということを考慮しながら計算すればよい訳でございます。i に j を掛けた結果は k になりますが，順序を反対にして j に i をかけるとマイナスがついて $-k$ になる。j に k を掛けると i でやはり順序を変えて k に j を掛けると $-i$ になる。同様に，k に i を掛けると j であり，i に

$k$ を掛けると $-j$ になるのです。例えば

$$(j-k)(3+2i+k)=1+i+j-5k$$

ですが，順序を反対にして

$$(3+2i+k)(j-k)=1-i+5j-k$$

となり，両者の計算結果は違って来ます。途中の計算は時間の関係もありますから略して結果だけ申しました。このように掛け算は交換可能でない訳であります。しかし，0以外の四元数でどんな四元数でも割り算ができます。ただ，掛け算が交換可能でないことを反映して，右側からの割り算と左からの割り算との区別があります。そのような区別があるだけで，どちらも，いつでもできるという具合です。このようなのが四元数でございます。

方程式 $x^2=-1$ に四元数の中では6つの解があります。$i$ と $-i$，$j$ と $-j$，$k$ と $-k$ の6つの解がある訳です。皆さん中学時代から二次方程式には2つの解があると聞き慣れておられますが，そのことは掛け算が交換可能であるという前提のもとで出て来る結論であります。四元数のような範囲では，こんなに6つも解があっても何ら矛盾しないのであります。

この四元数というものはかなり自然なものであります。いま，実数の全体とか，複素数の全体とか，自然数の全体とかを考えますと，実数の全体の中と，複素数の全体の中と，四元数の全体の中とでは加減乗除がいつでもできる訳ですが，その他に，この3つに共通な性質をもう少し併

せて抽象的に考えますと，それだけの性質をもっているのはその3種類だけであるというような特徴づけができます。このような立場から四元数はかなり自然なものであると言えると思います。

歴史的に四元数の次に現れましたのが16元数であります。それは $e_1$，$e_2$，$e_3$，$e_4$ という4つの記号を初めに考えまして，約束

$$\begin{aligned} e_\lambda{}^2 &= -1 \\ e_\lambda e_\mu &= -e_\mu e_\lambda \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq \lambda \leqq 4, \quad 1 \leqq \mu \leqq 4 \\ \lambda \neq \mu \end{pmatrix}$$

のもとで $e_1$，$e_2$，$e_3$，$e_4$ のあらゆる積をつくります。この約束の式で $\lambda$ と $\mu$ は括弧内に示しましたように1から4までの番号であり，$\lambda$ と $\mu$ は違った番号とします。上述の積は結局はプラス・マイナスの符号を抜きにして

$$1 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_1e_2 \quad e_1e_3 \quad e_1e_4 \quad e_2e_3 \quad e_2e_4 \quad e_3e_4$$
$$e_1e_2e_3 \quad e_1e_2e_4 \quad e_1e_3e_4 \quad e_2e_3e_4 \quad e_1e_2e_3e_4$$

の16種になる訳です。例えば，$e_1{}^4=(e_1{}^2)^2=(-1)^2=1$ となり，$e_1e_2e_1=(e_1e_2)e_1=(-e_2e_1)e_1=-e_2(e_1)^2=-e_2(-1)=e_2$ となります。このように1と $e_1$，$e_2$，$e_3$，$e_4$ の4種と，2つずつ掛けた6種と3つずつ掛けた4種と，4つとも掛けたものと，全体で16種の積ができて来ます。この16個に実数を掛けて加えた形に組立てたものを，やはりさきの四元数と同じように計算することにいたしますと，こんどは割り算はできない場合も起こりますが，加法・減法・乗法は自由

にできます。そのようなものが16元数でございます。これは昭和のひとケタ頃に量子力学でスピノール理論とかディラック方程式の扱いとかに注目され，応用されたのであります。

もっと一般的にしてクリフォード数があります。16元数では4つの記号から始めましたが，この度はm個の記号から始め，さきと同様の約束で積を作りますとこんどは$2^m$個の積に落着きます。それらにそれぞれ実数を掛けて加えた形のものですので$2^m$元数と呼べるものであります。このようなものをクリフォード数と申します。これまたスピノール理論なんかに応用されております。

このmが1の場合，1つだけの記号 $e_1$ から始まりますからそれをiで表しますと複素数が組立てられる訳です。mが2の場合は，2つの記号 $e_1$，$e_2$ をそれぞれi，jで表し，積 ij を k で表しますと四元数が組立てられます。mが4の場合はいまさきの16元数が組立てられるという次第ですので，クリフォード数は複素数や四元数や16元数のもっと一般的なものでございます。いまの話は $m=1$，$m=2$，$m=4$ の場合で $m=3$ の場合が抜けていますが，mが3の場合は八元数というべきものがある訳です。歴史的に四元数と16元数との間になぜ八元数が出てこなかったのだろうか。それは多分，私は余り量子力学を知りませんが，八元ではちょっと足りないんでしょう。やはり16元を要したのだろうと私は思っておします。物理学に詳しいおかたもおられますので間違っておれば指摘して頂きたく思います。なお，クリフォード数では，mが偶数の場合

の方が，m が奇数の場合より，代数的に綺麗になるのです。複素数（m＝1 の場合）は特別簡単ですが，四元数（m＝2）とか16元数（m＝4）とか64元数（m＝6）とか偶数の場合は代数的に簡単でして，八元数（m＝3）とか32元数（m＝5）とか奇数の場合は少し複雑であるという論議もありますが，それが量子力学の方に効いてはいないように思います。

クリフォード数とはこのようなものでして，それより広いものが hypercomplex numbers であり，非常に広い概念でして多元数というように訳されています。初めに申しましたように，実数は直線上に表示され，複表数は平面上に表示されますから，空間で表示される三元数がありましょうと，これはよく尋ねられるのですが，三元数は作ろうとしてもうまくいかず，綺麗な数にならないと思います。多元数はもっと多くの単位から先刻とまず似たと言えるように組立てられたものであり，それについては数学では深い理論がいろいろできます。中でも表現論というようなものもその中から現れて参ります。それがリー群の表現論とのつながりもつき，やはり素粒子論とか，あるいは物性理論とか，そのような方面で応用されているという状態であると言えましょう。

いままで申しましたのはすべて係数を実数にとっておりますが，係数を抽象的にとるとか，あるいは，四元数・16元数・クリフォード数でも別な抽象化をするとか，しかしこれらも一応は「数」と呼ばれております。多元数ももっと抽象的な扱いがなされます。また，先刻話から除外

すると言いました順序数というようなものもあります。このような「数」と呼ばれるものがいろいろございます。

最後に，それでは「数」とは何か，どのようなものを「数」と呼ぶのか，私見を述べて終らせて頂きたく思います。

「数」と呼ぶには，まず第一に，通常の数（複素数）とゆかり深いということ。第二に，通常の数と類似の仕方で計算ができること。（類似の程度もいろいろありましょうが――。）　第三に，通常の数と類似の仕方で応用されること。第四に，通常の数に関する数学的理論と類似の面白い理論がおこなわれること。以上のようなことが「数」と呼ばれるものの共通的な性質ではないかと思う訳であります。

先刻も申しましたように，数学で普通に数といえば複素数まででございますが，それ以外にも上述のような　「数」があるということを覚えて帰って頂ければというような趣旨であります。大変大胆な話などいたしまして，間違いも含んでいるかと恐れますが，そのような個所はご指摘を願いたく思います。どうも有難うございました。

追記　講演後の質疑の１つにかんがみ１つの例の当初の公式を修正した個所がございます。

（京都大学名誉教授）